**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №4**

**по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»**

Тема: Частотный анализ формул численного интегрирования

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 9381 |  | Колованов Р.А. |
| Студент гр. 9381 |  | Семенов А.Н. |
| Преподаватель |  | Середа А.-В. И. |

Санкт-Петербург

2022

**Цель работы.**

Провести анализ частотных характеристик известных формул численного интегрирования.

**Основные теоретические положения.**

Свойства любого фильтра однозначно определяют его частотная и фазовая характеристики. Они показывают, какое влияние фильтр оказывает на амплитуду и фазу различных гармоник обрабатываемого сигнала.

Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и интегрирования «по правилу 3/8» для численного интегрирования можно рассматривать, как некоторый рекурсивный фильтр.

* Формула прямоугольников:



* Формула трапеций:



* Формула Симпсона:



* Формула интегрирования «по правилу 3/8»:



**Постановка задачи.**

Получить формулы для передаточных функций нерекурсивных фильтров, соответствующих полиномиальному сглаживанию дискретного сигнала для различных квадратурных формул и построить графики . Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Получить формулы для передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам Ньютона-Котеса различного порядка. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций для различных квадратурных формул.

**Выполнение работы.**

1. Вывести формулы передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона. Построить графики передаточных функций и графики отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства полученных передаточных функций.

Выведем формулы для передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле прямоугольников:

Формула прямоугольников:

Пусть и . Тогда получаем:

Точное значение интеграла равно , тогда получаем следующее отношение вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному:

Выведем формулы для передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле трапеций:

Формула трапеций:

Пусть и . Тогда получаем:

Точное значение интеграла равно , тогда получаем следующее отношение вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному:

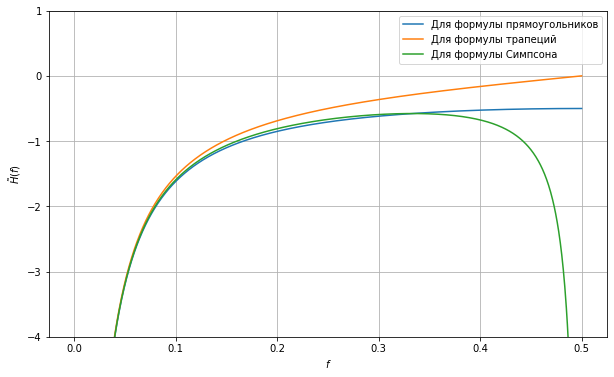
Выведем формулы для передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле Симпсона:

Формула Симпсона:

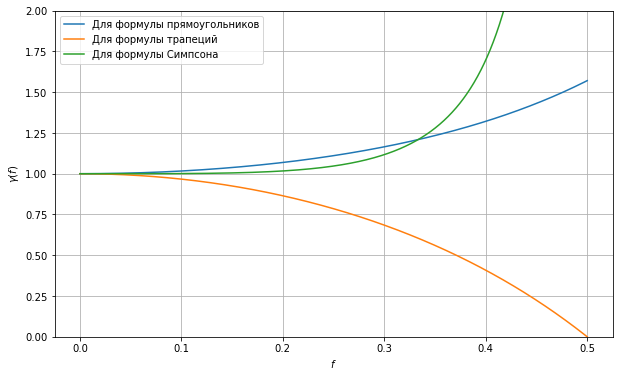
Пусть и . Тогда получаем:

Точное значение интеграла равно , тогда получаем следующее отношение вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному:

Графики для передаточных функций на интервале представлены на рис. 1. Графики для отношений вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному значению на интервале представлены на рис. 2.



*Рисунок 1* *– Передаточные функции рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.*



*Рисунок 2* *– Отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному для рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.*

Из графиков видно, что рекурсивный фильтр, которому соответствует квадратурная формула трапеций, подавляет высокие частоты, а рекурсивные фильтры, которым соответствуют квадратурные формулы прямоугольников и Симпсона, усиливают высокие частоты.

2. Вывести формулу передаточной функции рекурсивного фильтра для интегрирования «по правилу 3/8»:



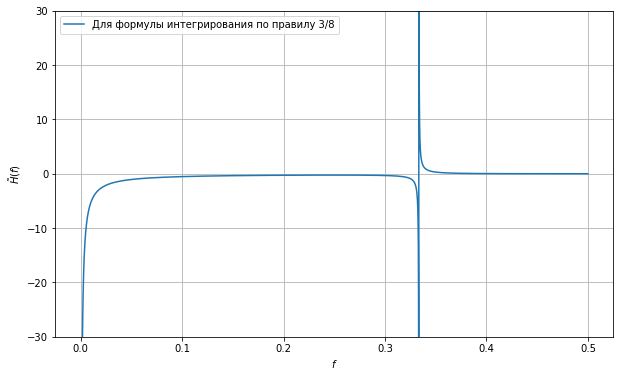
Построить график передаточной функции и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства передаточной функции.

Выведем формулы для передаточной функции рекурсивного фильтра для интегрирования «по правилу 3/8»:

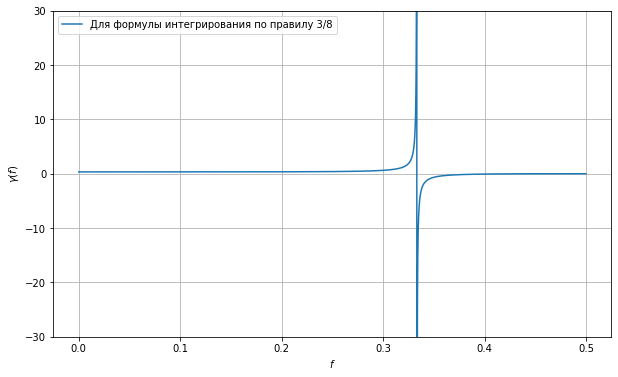
Пусть и тогда , тогда получаем:

Точное значение интеграла равно , тогда получаем следующее отношение вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному:

График для передаточной функции на интервале представлен на рис. 3. График для отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному значению на интервале представлен на рис. 4.



*Рисунок 3* *– Передаточная функция рекурсивного фильтра для интегрирования «по правилу 3/8».*



*Рисунок 4* *– Отношение вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному для рекурсивного фильтра для интегрирования «по правилу 3/8».*

3. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций, полученных при выполнении п. 1 и 2.

Были получены графики передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и интегрирования «по правилу 3/8», а также отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному значению для них. Графики представлены на рис. 1-4.

Из графиков на рисунках 1 и 3 видно, что рекурсивный фильтр, которому соответствует квадратурная формула трапеций, подавляет высокие частоты, а рекурсивные фильтры, которым соответствуют квадратурные формулы прямоугольников и Симпсона, усиливают высокие частоты.

**Выводы.**

В ходе выполнения лабораторной работы был проведен анализ частотных характеристик известных формул численного интегрирования.

В процессе были выведены формулы для передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и интегрирования «по правилу 3/8». Для них были построены графики передаточных функций , а также графики отношений вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному значению . При помощи полученных графиков были проинтерпретированы частотные свойства передаточных функций и проведен сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций.

Приложение А

исходный код программы

import math

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def h\_rect(f):

return (1 / (2j\*np.sin(math.pi\*f))).imag

def h\_trapezoid(f):

return (np.cos(math.pi\*f) / (2j\*np.sin(math.pi\*f))).imag

def h\_simpson(f):

return ((np.cos(2\*math.pi\*f)+2)/ (3j\*np.sin(2\*math.pi\*f))).imag

def k\_rect(f):

return math.pi \* f / (np.sin(math.pi \* f))

def k\_trapezoid(f):

return np.cos(math.pi \* f)\*(math.pi\*f/np.sin(f\*math.pi))

def k\_simpson(f):

return ((np.cos(2\*math.pi\*f) + 2)/3) \* ((2\*math.pi\*f)/(np.sin(2\*math.pi\*f)))

f\_values = np.linspace(1e-10, 0.5, 1000)

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(f\_values, [h\_rect(f) for f in f\_values], label="Для формулы прямоугольников")

plt.plot(f\_values, [h\_trapezoid(f) for f in f\_values], label="Для формулы трапеций")

plt.plot(f\_values, [h\_simpson(f) for f in f\_values], label="Для формулы Симпсона")

plt.ylim((-4, 1))

plt.ylabel(r"$\tilde{H}(f)$")

plt.xlabel(r"$f$")

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(f\_values, [k\_rect(f) for f in f\_values], label="Для формулы прямоугольников")

plt.plot(f\_values, [k\_trapezoid(f) for f in f\_values], label="Для формулы трапеций")

plt.plot(f\_values, [k\_simpson(f) for f in f\_values], label="Для формулы Симпсона")

plt.ylim((0, 2))

plt.ylabel(r"$\gamma(f)$")

plt.xlabel(r"$f$")

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()

def h\_3\_8(f):

return ((np.cos(3\*math.pi\*f)+3\*np.cos(math.pi\*f))/(8j\*np.sin(3\*math.pi\*f))).imag

def k\_3\_8(f):

return (1/12)\*(np.cos(3\*math.pi\*f)+3\*np.cos(math.pi\*f))\*((3\*math.pi\*f)/np.sin(3\*math.pi\*f))

f\_values = np.linspace(1e-10, 0.5, 10000)

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(f\_values, [h\_3\_8(f) for f in f\_values], label="Для формулы интегрирования по правилу 3/8")

plt.ylim((-30, 30))

plt.ylabel(r"$\tilde{H}(f)$")

plt.xlabel(r"$f$")

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(f\_values, [k\_3\_8(f) for f in f\_values], label="Для формулы интегрирования по правилу 3/8")

plt.ylim((-30, 30))

plt.ylabel(r"$\gamma(f)$")

plt.xlabel(r"$f$")

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()